الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية عين الدّفلى :متقنة ابن خلدون ع/د-ثانوية غالمي ع/د- ثانوية احمد ملاحي المخاطرية.

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي دورة مــا ي 2018

الشعبة: علوم تجريبية

إختبار في مادة الرياضيات المدة :03 ساعات و نصف

على التلميذ أن يختار أحد الموضوعين التاليين

-الموضوع الأول-

التمرين الأول: (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النّقط التّالية: $A(-2;2;1)$ ؛ $B(-1;1;0)$ ؛ $C(0;1;2)$ و $D(6;6;-1)$ و المستوي (P) ذو المعادلة: $(P): 2x-y-z+3=0$

1. حدّد طبيعة المثلّث BCD ثمّ احسب مساحته. (نأخذ $(u.a)$ كوحدة للمساحة)
2. أثبت أنّ الشّعاع $\vec{n}(-2;3;1)$ ناظمي للمستوي (BCD) ثمّ حدّد معادلة ديكارتية له.
3. بيّن أنّ $ABCD$ رباعي وجوه ثمّ احسب حجمه.(نأخذ $(u.v)$ كوحدة للحجم)
4. بيّن أنّ المستوي (P) يقطع المستوي (BCD) وفق المستقيم (BC).

التمرين الثّاني: (5 نقاط)

نعرف في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) ذات المجهول z التّالية : $z^2-4ie^{i\frac{\pi}{6}}=0 ....(E)$

1. تحقق أن المعادلة (E) تكتب على الشكل $\left(z+2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z-2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=0$.
2. حلّ ثمّ اكتب على الشكل الجبري حلول المعادلة (E).
3. $(o,\vec{u},\vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي الوحدة على المحورين 1cm , نعتبر النقط A ؛ B ؛ C و D ذات اللواحق $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=-z_A$ ؛ $z_C=z_A-\bar{z}_B$ و $z_D=4+2i\sqrt{3}$ على الترتيب.
   أ. أحسب طويلة وعمدة z_A و z_C ثمّ علم النقط A ;B و C ؟
   ب. بيّن أنّ النقطة D مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.
   ج. احسب ثمّ فسر بيانيا العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_D-z_C}$.استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.
4. بيّن أنّ العدد $2\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018}-\overline{\left(\frac{z_A}{z_B}\right)}^{1439}$ تخيّلي صرف.
5. عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $\arg(z_Bz)-\arg(z_A\bar{z})=2k\pi / \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.

التمرين الثالث :(4 نقاط)

لتكن f الدّالة المعرّفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=2x-x^2$.

1. بيّن أنّ f دالة متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ ثمّ استنتج أنّه اذا كان $x\in[0;1]$ فانّ $f(x)\in[0;1]$.
2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على IN كما يلي: $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ. برهن من أجل كل عدد طبيعي n أنّ $0<u_n<1$.

ب. أثبت أنّ (u_n) متتالية متزايدة تماما على IN ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على IN بـ : $v_n=\ln(1-u_n)$

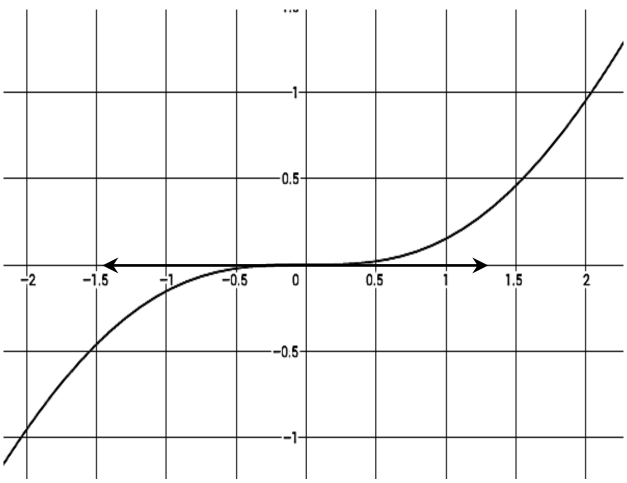
أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية ثمّ استنتج أنّ $v_n=-\ln 2\times 2^n$.

ب. اكتب u_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n} u_n$.

4. احسب الجداء P_n بدلالة n : $P_n=(1-u_0)\times(1-u_1)\times...\times(1-u_n)$

التمرين الرابع : (07نقاط)

فيما يلي المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$



I. لتكن g الدّالة المعرّفة على IR بـ:

$g(x)=4\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)+\alpha x$ حيث α عدد حقيقي.

الشّكل المقابل هو التمثيل البياني (C_g) الممثل للدّالة g.

1. باستعمال المعطيات المناسبة في الشكل أوجد قيمة α.
2. عيّن بيانيا اشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على IRبـ: $f(x)=4\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)+x$ و ليكن (C_f) المنحني الممثل لها.

1. أ.احسب المقدار $f(x)+f(-x)$. ماذا يمكنك القول عن f ؟ فسّر ذلك بيانيا.

ب.احسب نهاية الدالة f عند$+\infty$ ثمّ استنتج نهايتها عند$-\infty$.

2. بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين هما $(d):y=x+4$ و$(d'):y=x-4$.
3. أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x)=\frac{(e^x-3+2\sqrt{2})(e^x-3-2\sqrt{2})}{(1+e^x)^2}$.

ب. انشئ جدول تغيرات الدّالة f. (تعطى $f(\ln(3+2\sqrt{2}))=f(1.76)=-1.07$)

4. أ.اكتب معادلة المماس (T) عند المبدأ.

ب. باستعمال الجزء I ادرس وضعيّة (C_f) بالنسبة لـ(T). ماذا تستنتج؟

5. ارسم (d) ؛(d') ؛(T) و(C_f).
6. **.** أحسب مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=-1$ ؛ $x=1$ و $y=-x$.

-الموضوع الثّاني-

التمرين الاوّل:(4 نقاط)

يحتوي كيس على 12 قرّيصة؛ منها ثلاثة(3) حمراء(r) تحمل الحروف A ؛ F ؛ G و خمسة(5) خضراء(v) تحمل الحروف A ؛A ؛ B ؛ C ؛ C و البقيّة بيضاء(b) تحمل الحروف B ؛ B ؛ C ؛C.

1. نسحب عشوائيا ثلاث قريصات في ان واحد.

أ. احسب P_1 احتمال ظهور الألوان الثّلاثة .

ب. احسب P_2 احتمال الحصول على حروف كلمة BAC.

ج. احسب P_3 احتمال الحصول على حروف لكلمة BAC بالوان العلم الوطني.

د. استنتج احتمال الحصول على الالوان الثّلاثة مع العلم انّها تحمل كلمة BAC.

2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد مرات ظهور اللون الخضر v.

أ. اعط قانون احتمال المتغيّر العشوائي X.

ب. احسب انحرافه المعياري$\sigma(X)$.

التمرين الثّاني:(5 نقاط)

فيما يلي المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقط C,B,A ذات اللواحق $z_C=2\sqrt{3}, z_B=\sqrt{3}-\mathrm{i}, z_A=\sqrt{3}+i$ على الترتيب

اختر الاجابة الصحيحة مع التّعليل.

1. الجملة $\begin{cases} z_1 z_2 = 4 \\ \bar{z}_1+\bar{z}_2=2\sqrt{3} \end{cases}$ذات المجهولين z_1 و z_2 تقبل في $\mathbb{C}$ حلين:

أ. حقيقيين ب. مترافقين ج. متعاكسين

2. OABهو مثلث:

أ. متقايس الاضلاع ب. قائم ج. متساوي الساقين.

3. الرباعي $OACB$هو:

أ. متوازي أضلاع ب. مربّع ج. معيّن

4. التحويل النقطي S الذي مركزه O و يحول A الى C هو :

أ. تشابه ب. انسحاب ج. دوران.

5. التحويل النقطيS' الذي يحول B الى C و يحول O الى A هو :

أ. تحاكي ب. انسحاب ج. دوران

6. مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|\bar{z}-\sqrt{3}-i|=|z-\sqrt{3}-i|$ هي :

أ. محور القطعة$[AB]$ ب. المحور الحقيقي ج. المحور التّخيّلي.

التمرين الثّالث:(4نقاط)

1. حل المعادلة التفاضلية $(E): y'+y\ln 2=0$ ؛ ثمّ عيّن f الحلّ الخاص لها الذي يحقق $f(0)=1$.
2. نضع من أجل كلّ x من $\Re$ ؛ $f(x)=e^{-x\ln 2}$ ؛ عيّن F دالة أصلية للدّالة f.
3. لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $u_n=\int_{n-1}^{n} f(x)dx$.

أ. بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية ثمّ استنتج أنّ $u_n=\frac{1}{2^n\ln 2}$ ثمّ ادرس تقاربها.

ب. احسب بدلالة n المجموع $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$.

4. نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln(|u_n|)$

✓ بيّن أنّ (v_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الاوّل.

التمرين الرابع :(07 نقاط)

فيما يلي المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

I. g دالة عددية معرفة على $]e^{-1},+\infty[$ بـ: $g(x)=x(1+\ln x)^2-8$

أ. ادرس اتّجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]e^{-1},+\infty[$.

ب. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]e^{-1},+\infty[$ ثمّ تحقق أنّ $2.33<\alpha<2.35$.

ج. استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]e^{-1},+\infty[$.

II. f دالة عددية معرفة على $]e^{-1},+\infty[$ بـ: $f(x)=4\left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)+x$ و ليكن (C_f) المنحنى الممثّل لها.

1- أ. احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} e^{-1}} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

ب. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ بيّن أنّ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x-4$.

ج. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

2- أ. أثبت من أجل كل x من $]e^{-1},+\infty[$ أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x(1+\ln x)^2}$.

ب . استنتج دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ج. شكل جدول تغيرات الدالة f.

د. بيّن أن $f(\alpha)=\frac{\alpha}{2}(3-\ln^2\alpha)$ ثمّ عيّن حصرا لـ$f(\alpha)$ سعته 10^{-3} .

3- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند 1 .

4- أنشئ كلا من (Δ) ؛ (T) و (C_f). (تعطى $f(\alpha)=2.66$)

5- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=2m-\frac{m^2}{f(x)}$.

التمرين الأول: (4 ن)

$A(-2;2;1)$; $B(-1;1;0)$; $C(0;1;2)$, $D(6;6;-1)$

1- تحديد طبيعة المثلث BDC:

$\vec{BD}(7;5;-1)$; $\vec{BC}(1;0;2)$, $\vec{DC}(-6;-5;3)$

$BD=\sqrt{75}$; $BC=\sqrt{5}$; $DC=\sqrt{70}$

بما أن $BD^2 = BC^2 + DC^2$ فإن المثلث BDC قائم في C.

مساحته: $S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DC = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{2} u.a}$

2- اثبات أن $\vec{n}(-2;3;1)$ ناظمي لـ BCD:

لدينا: $\vec{n}\cdot\vec{BC} = -2+0+2 = 0$; $\vec{n}\cdot\vec{BD} = -14+15-1 = 0$

بما أن $\vec{BC} \neq k\vec{BD}$ حيث $\vec{n}\perp\vec{BC}$ ، $\vec{n}\perp\vec{BD}$ فإن

وبالتالي $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (BCD).

معادلة (BCD):

$(BCD): -2x+3y+z-(-2(-1)+3(1)+1(0))=0$

$\boxed{= -2x+3y+z-5=0}$

3- اثبات أن ABCD رباعي وجوه:

لدينا: $(ACD): -2(-2)+3(2)+(1)-5 = 6 \neq 0$

اذن: $A \notin (BCD)$

ومنه ABCD رباعي وجوه.

حساب حجمه:

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot h$

$= \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot \frac{|-2x_A+3y_A+z_A-5|}{\sqrt{4+9+1}}$

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{14}} = \boxed{5\ u.v}$

4- اثبات أن: $(BCD)\cap(P) = (BC)$

حل 1: $(BC): \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=2t+2 \end{cases} / t\in IR.$

لدينا: $(BC)\cap(P): 2t-1-2t-2+3=0$

$0=0$ (محققة دوما)

اذن: $(BC)\subset(P)$

ولدينا: $C\in(BCD)$ ، $B\in(BCD)$ أي $(BC)\subset(BCD)$

اذن: $(BCD)\cap(P) = (BC)$

طـ2: نبين أن: $C\in(P)$ و $B\in(P)$

طـ3: نبين أن: $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \vec{BC} \\ B\in(P) \end{cases}$ و .

التمرين الثاني: (5ن)

$(E): z^2 - 4ie^{i\pi/6} = 0.$

1/ التحقق:

لدينا: $(z-2e^{i\pi/3})(z+2e^{i\pi/3}) = 0$

تكافئ: $z^2 - 4e^{i2\pi/3} = 0$

تكافئ: $z^2 - 4e^{i\pi/2}e^{i\pi/6} = 0$

اذن: $\boxed{z^2 - 4ie^{i\pi/6} = 0}$

2/ حل المعادلة (E):

(E) تكافئ: $\begin{cases} z-2e^{i\pi/3}=0 & \text{اما} \\ z+2e^{i\pi/3}=0 & \text{أو} \end{cases}$

$\begin{cases} z = 2e^{i\pi/3} = 2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1+i\sqrt{3} \\ z = -(2e^{i\pi/3}) = -(1+i\sqrt{3}) = -1-i\sqrt{3} \end{cases}$

$\boxed{S = \{-1-i\sqrt{3} ; 1+i\sqrt{3}\}}.$

3/ أ) حساب طويلة و عمدة z_A و z_C

ب) تعليم النقط: A ، B و C

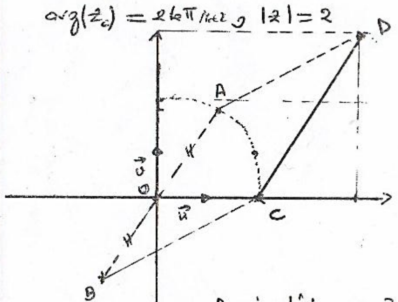
$z_A = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ / $\begin{cases} |z_A| = 2 \\ arg(z_A) = \frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$

$z_C = z_A - \bar{z}_B = (1+i\sqrt{3}) - (-1+i\sqrt{3})$

$= 1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}$

$z_C = 2.$

$|z|=2$ و $arg(z_C) = 2k\pi / k\in Z$



3- ب- اثبات أن D مرجح:

$D: \{(A,1);(B,-1);(C,1)\}.$

$\frac{z_A - z_B + z_C}{1-1+1} = 1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}+2$

$= 4+2i\sqrt{3}.$

$= z_D$

جـ- حساب ثم تفسير العدد: $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$

$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = \frac{1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}}{4+2i\sqrt{3}-2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}} = 1$

اذن: $\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}\right) = 2k\pi \ / k\in Z \end{cases}$ ، $\begin{cases} AB = DC \\ \vec{AB} \parallel \vec{DC} \end{cases}$

ومنه الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

4- اثبات أن العدد تخيلي صرف:

$2\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018} - \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1439} = 2\left(e^{i\pi/3}\right)^{2018} - \left(e^{i\pi}\right)^{1439}$

$= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) - \cos(\pi).$

$= 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1.$

$= \cancel{-1} + i\sqrt{3} \cancel{+1}$

$\boxed{= i\sqrt{3} \in iIR}$

5- تعيين مج النقط (Γ):

$(\Gamma): arg(z_B \cdot z) - arg(z_A \cdot \bar{z}) = 2k\pi / k\in Z$

$: arg(z_B) + arg(z) - arg(z_A) - arg(\bar{z}) = 2k\pi$

$: 2arg(z) = +\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

$2arg(z) = \pi + 2k\pi. / k\in Z.$

$arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi / k\in Z$

اذن (Γ) هي المحور التخيلي ماعدا النقطة "O".

التمرين الثالث: (4ن).

$f(x) = 2x - x^2$; $D_f = [0;1].$

1- اثبات أن f دالة متزايدة تماما على [0;1]

f قابلة للاشتقاق على [0;1] ودالتها المشتقة

$f'(x) = 2-2x = 2(1-x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1	↘ $-\infty$

لدينا: $0<x<1$

وعلما أن f متزايدة تماما ومعرفة على المجال $]0;1[$

فإن: $f(0) < f(x) < f(1)$

أي: $0 < f(x) < 1$.

2/ $u_{n+1} = f(u_n)$; $u_0 = \frac{1}{2}$

أ/ اثبات أن: $0 < u_n < 1$

نضع: $P(n): 0 < u_n < 1$; $n \in IN$

$P(0): 0 < u_0 < 1$

$P(0): 0 < \frac{1}{2} < 1$ (محققة)

نفرض أن P(n) صحيحة من أجل كل n من IN ونثبت صحة P(n+1).

$P(n+1): 0 < u_{n+1} < 1$

لدينا من ف.ت: $0 < u_n < 1$

اذن: $0 < f(u_n) < 1$ (حسب س-1-)

$0 < u_{n+1} < 1$ (محققة)

ومنه P(n+1) صحيحة اذا كانت P(n) صحيحة وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع P(n) صحيحة.

ب- اثبات أن (u_n) متزايدة:

$u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n = u_n - u_n^2$

$= u_n(1-u_n).$

وعلما أن: $0 < u_n < 1$ فإن $1-u_n > 0$

وبالتالي (u_n) م. متزايدة تماما على IN.

استنتاج أن (u_n) متقاربة:

علما أن (u_n) م متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 1 فإنها متقاربة.

3/ $v_n = \ln(1-u_n)$; $n\in IN$

أ- اثبات أن (v_n) م. هندسية:

$v_{n+1} = \ln(1-u_{n+1}) = \ln(1-2u_n+u_n^2)$

$= \ln(1-u_n)^2$

$= 2\ln(1-u_n).$

$\boxed{v_{n+1} = 2v_n}$

اذن (v_n) م. هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = \ln(1-u_0) = -\ln 2.$

السنة الدّراسية: 2017 / 2018	تصحيح اختبار الفصل III في مادة الرياضيات	الشعبة: 3ع ت.

$v_n = v_0 \times q^n = -\ln 2 \cdot 2^n.$

ب- كتابة U_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = \ln(1-U_n)$

اذن : $e^{v_n} = 1 - U_n.$

ومنه : $U_n = 1 - e^{v_n}.$

$\boxed{U_n = 1 - e^{-\ln 2 \cdot 2^n}}$

$\lim_n U_n = \lim_n 1 - e^{-\ln 2 \cdot 2^n}$; $-\ln 2 \cdot 2^n \to -\infty$; $e^{-\ln 2 \cdot 2^n} \to 0$

$\boxed{\lim_n U_n = 1}$

4- حساب الجداء P_n :

لدينا $P_n = (1-U_0) \times (1-U_1) \times \cdots \times (1-U_n)$

لكن : $1 - U_n = e^{v_n}.$

اذن : $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \cdots \times e^{v_n}.$

$= e^{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}$

$= e^{\sum_{i=0}^{n} v_n} = e^{v_0 \frac{2^{n+1}-1}{2-1}}.$

$\boxed{P_n = e^{-\ln(2)[2^{n+1}-1]}}$

التمرين الرابع : (07ن)

I- $g(x) = 4\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) + \alpha x \ / \ \alpha \in \mathbb{R}.$

1- ايجاد α :

من البيان نلاحظ أن محور الفواصل $(y=0)$ هو مماس لـ (C_g) عند 0 .

اذن : $g'(0) = 0.$

$g'(x) = \alpha + 4 \frac{-e^x(1+e^x) - e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}$

$= \alpha - 4e^x \frac{1+\cancel{e^x}+1-\cancel{e^x}}{(1+e^x)^2}$

$g'(x) = \alpha - \frac{8e^x}{(1+e^x)^2}$

$g'(0) = 0$ تكافئ : $\alpha - \frac{8}{4} = 0.$

اذن : $\boxed{\alpha = 2}$

2- اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II- $f(x) = 4\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) + x$

1- أ- حساب $f(x) + f(-x)$:

$f(x) + f(-x) = 4\frac{1-e^x}{1+e^x} + \cancel{x} + 4\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} - \cancel{x}$

$= \frac{4 - 4e^x + 4e^x(1-e^{-x})}{1+e^x}$

$= \frac{\cancel{4} - \cancel{4e^x} + \cancel{4e^x} - \cancel{4}}{(1+e^x)}$

$\boxed{f(x) + f(-x) = 0}$ ...(1)

الاستنتاج : (1) تكافئ : $f(x) = -f(-x)$

اذن f دالة فردية تمثيلها البياني متناظر بالنسبة للمبدأ "O" .

ب- حساب النهايات :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4\frac{1-e^x}{1+e^x} + x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$

لأن f دالة فردية.

2- اثبات أن (C_f) يقبل م.م مائلين : $(d) : y = x+4$ و $(d') : y = x-4$

$f(x) - y_1 = 4\frac{1-e^x}{1+e^x} + \cancel{x} - \cancel{x} - 4$

$= \frac{\cancel{4} - 4e^x - \cancel{4} - 4e^x}{(1+e^x)}$

$\boxed{f(x) - y_1 = \frac{-8e^x}{1+e^x}}$

$f(x) - y_2 = 4\frac{1-e^x}{1+e^x} + \cancel{x} - \cancel{x} + 4$

$= \frac{4 - \cancel{4e^x} + 4 + \cancel{4e^x}}{1+e^x}$

$\boxed{f(x) - y_2 = \frac{8}{1+e^x}}$

بما أن :
$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_2) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_1) = 0 \end{cases}$$

فإن : (d) و (d') مستقيمين مقاربين عند $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب.

السنة الدّراسية: 2017 / 2018	تصحيح اختبار الفصل III في مادة الرياضيات	الشعبة: 3ع ت.

3- أ- اثبات صحة المشتقة :

لدينا من جهة :

$f'(x) = 4\frac{-e^x(1+e^x) - e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2} + 1$

$= \frac{-4e^x(1+\cancel{e^x}+1-\cancel{e^x}) + 1 + e^{2x} + 2e^x}{(1+e^x)^2}$

$\boxed{f'(x) = \frac{e^{2x} - 6e^x + 1}{(1+e^x)^2}}$

ولدينا من جهة اخرى :

$f'(x) = \frac{(e^x - 3 + 2\sqrt{2})(e^x - 3 - 2\sqrt{2})}{(1+e^x)^2}$

$= \frac{e^{2x} + e^x(-3-2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}) + (-3+2\sqrt{2})(-3-2\sqrt{2})}{(1+e^x)^2}$

$= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9 - 8}{(1+e^x)^2}$

$\boxed{f'(x) = \frac{e^{2x} - 6e^x + 1}{(1+e^x)^2}}$

ب- استنتاج جدول تغيرات الدالة f :

$f'(x) = 0$ تكافئ :
$$\begin{cases} e^x = 3+2\sqrt{2} & \text{اما} \\ e^x = 3-2\sqrt{2} & \text{أو} \end{cases}$$

معناه :
$$\begin{cases} x = \ln(3+2\sqrt{2}) & \text{اما} \\ x = \ln(3-2\sqrt{2}) & \text{أو} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\ln(3-2\sqrt{2})$		0		$\ln(3+2\sqrt{2})$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1{,}07$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1{,}07$	$\nearrow$	$+\infty$

4- أ- معادلة المماس عند المبدأ "O" :

$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$; $f(0) \to 0$

$f'(0) = \frac{1-6+1}{4} = -1$

$\boxed{(T) : y = -x}$

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) :

$f(x) - y = 4\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) + x + x.$

$= 4\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) + 2x$

$\boxed{f(x) - y = g(x)}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T)		(C_f) يقع تحت (T)	(T) يخترق (C_f)	(C_f) يقع فوق (T) .	

6- حساب مساحة الحيز D :

$D = -\int_{-1}^{0} (f(x) - y)\,dx + \int_{0}^{1} (f(x) - y)\,dx.$

$D = +\int_{0}^{-1} g(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\,dx.$

$g(x) = 4\frac{1-e^x}{1+e^x} + 2x.$

$= \underbrace{4\frac{1-e^x}{1+e^x} + x}_{f(x)} + x.$

$= \underbrace{\underbrace{x+4}_{y} - 8\frac{e^x}{1+e^x}}_{f(x)} + x.$

$= 2x + 4 - 8\frac{e^x}{1+e^x}.$

$G(x) = x^2 + 4x - 8\ln(1+e^x).$

$G(0) = -8\ln 2.$

$G(+1) = 5 - 8\ln(1+e).$

$G(-1) = -3 - 8\ln(1+e^{-1}).$

$D = G(-1) - G(0) + G(1) - G(0).$

$= -3 - 8\ln(1+e^{-1}) + 16\ln 2 + 5 - 8\ln(1+e)$

$= 2 + 16\ln 2 - 8\ln\left((1+e)(1+e^{-1})\right).$

$= 2 + 16\ln 2 - 8\ln(1 + e^{-1} + e + 1)$

$D = 2 + 16\ln 2 - 8\ln(2 + e + e^{-1}).$

الشعبة: 3ع ت	تصحيح اختبار الفصل III في مادة الرياضيات -م2-	السنة الدراسية: 2017 / 2018

التمرين الأول:

كيس به 12 شريحة ملونة وتحمل حروف:

حسب اللون:

(r)	(v)	(b)
03	05	04

حسب الحروف:

A	B	C	F	G
03	03	04	01	01

1- حساب الاحتمالات:

نوع السحب: في آن واحد.

طريقة العد: توفيقة C_n^p.

أ- الحصول على الألوان الثلاثة:

$E_1=\{r;v;b\}$.

$P_1=\dfrac{C_5^1\times C_3^1\times C_4^1}{C_{12}^3}=\dfrac{60}{220}=0,27$

ب- الحصول على حروف كلمة BAC:

$E_2=\{A;B;C\}$.

$P_2=\dfrac{C_3^1\times C_3^1\times C_4^1}{C_{12}^3}=\dfrac{36}{220}=0,163$

جـ- الحصول على كلمة Bac بالألوان الثلاثة:

r : A(1) ; B(0) ; C(0)

v : A(2) ; B(1) ; C(2)

b : A(0) ; B(2) ; C(2)

$E=\{A_r;B_v;C_b\}$ ، $E=\{A_r;B_b;C_v\}$

$P_3=\dfrac{C_1^1\times C_1^1\times C_2^1+C_1^1\times C_2^1\times C_2^1}{C_{12}^3}=\dfrac{2+4}{220}=0,027$

د- احتمال الحصول على الألوان الثلاثة علما أنها حروف كلمة BAC:

$P_{Bac}(rvb)=\dfrac{P(rvb\cap Bac)}{P_{Bac}}=\dfrac{P_3}{P_2}=0,167.$

2- أ- قانون الاحتمال للمتغير X:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{35}{220}$	$\frac{105}{220}$	$\frac{70}{220}$	$\frac{10}{220}$

$P(X=0)=\dfrac{C_5^0\times C_7^3}{C_{12}^3}=\dfrac{35}{220}$

$P(X=1)=\dfrac{C_5^1\times C_7^2}{C_{12}^3}=\dfrac{105}{220}$

$P(X=2)=\dfrac{C_5^2\times C_7^1}{C_{12}^3}=\dfrac{70}{220}$

$P(X=3)=\dfrac{C_5^3}{C_{12}^3}=\dfrac{10}{220}$

ب- حساب الانحراف المعياري $\sigma(X)$:

$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i=\dfrac{105+140+30}{220}=\dfrac{275}{220}=1,25.$

$V(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2P_i-E^2(X)=\dfrac{105+280+90}{220}-(1,25)^2$

$V(X)=0,59$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=0,77$

الشعبة: 3ع ت	تصحيح اختبار الفصل III في مادة الرياضيات -م2-	السنة الدراسية: 2017 / 2018

التمرين الثاني:

$z_A=\sqrt3+i$; $z_B=\sqrt3-i$; $z_C=2\sqrt3$.

اختيار الإجابة الصحيحة مع التعليل:

1- الجملة $\begin{cases}z_1\cdot z_2=4\\ z_1+z_2=2\sqrt3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_1\cdot z_2=4\\ \bar z_1+\bar z_2=2\sqrt3\end{cases}$.

حل الجملة يؤول إلى حل المعادلة:

$z^2-Sz+P=0$ / $\begin{cases}S=2\sqrt3\\ P=4\end{cases}$.

$z^2-2\sqrt3z+4=0$

$\Delta=12-4(4)=-4<0$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين.

(1 ⟵ ب)

2- طبيعة المثلث OAB:

$\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{\sqrt3+i}{\sqrt3-i}=\dfrac{2+2i\sqrt3}{4}=\dfrac12+i\dfrac{\sqrt3}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}.$

إذن: $\begin{cases}OA=OB.\\ (\vec{OB},\vec{OA})=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

ومنه OAB مثلث متقايس الأضلاع.

(2 ⟵ أ)

3- طبيعة الرباعي OACB:

$\vec{OB}$: $z_B=\sqrt3-i$

$\vec{AC}$: $z_{\vec{AC}}=2\sqrt3-\sqrt3-i=\sqrt3-i.$

لدينا: $z_{\vec{AC}}=z_B$ إذن $\vec{AC}=\vec{OB}$

ومنه OACB متوازي أضلاع

لأن OA=OB (ضلعان متتاليان)

وعليه فإن OABC معين.

(3 ⟵ ج)

4- طبيعة التحويل S:

لدينا: $\begin{cases}S(O)=O\\ S(A)=C\end{cases}$ إذن: $S:\ z_C=az_A.$

$a=\dfrac{z_C}{z_A}=\dfrac{2\sqrt3}{\sqrt3+i}=\dfrac{2\sqrt3}{2e^{i\pi/6}}=\sqrt3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

إذن S تشابه زاويته $-\frac{\pi}{6}$ ونسبته $\sqrt3$

(4 ⟵ أ)

5- طبيعة التحويل S':

لدينا: $\begin{cases}S'(D)=C\\ S'(O)=A\end{cases}$ إذن:

$a=\dfrac{z_C-z_A}{z_B}=\dfrac{\sqrt3-i}{\sqrt3-i}=1$

إذن أي انسحاب شعاعه $\vec{OB}$ أو $\vec{AC}$

(5 ⟵ ب)

6- مجموعة النقط $M(z)$:

لدينا: $|z-\sqrt3-i|=|\bar z-\sqrt3-i|$

أي: $|x+iy-\sqrt3-i|=|x-iy-\sqrt3-i|$

$|(x-\sqrt3)+i(y-1)|=|(x-\sqrt3)-i(y+1)|$

$(x-\sqrt3)^2+(y-1)^2=(x-\sqrt3)^2+(y+1)^2$

$y^2-2y+1=y^2+2y+1$

إذن $y=0$ ومنه مجموعة النقط هي المحور الحقيقي

(6 ⟵ ب)

التمرين الثالث:

$(E):\ y'+y\ln2=0$

1- حل المعادلة (E):

(E) تكافئ $y'=-y\ln2$

ومنه y هي جميع الدوال من الشكل $y=Ce^{-x\ln2}$ حيث C ثابت حقيقي.

• الحل الخاص f:

$y(0)=1$ معناه: $C=1$

ومنه: $f(x)=e^{-x\ln2}$.

2- تعيين دالة أصلية للدالة f:

$F_k(x)=-\dfrac{1}{\ln2}e^{-x\ln2}+k\ /k\in\mathbb{R}$

$F(0)=1$ معناه: $-\dfrac{1}{\ln2}+k=1$

$k=1+\dfrac{1}{\ln2}$

3- أ- إثبات أن (u_n) م. هندسية:

$u_n=\int_{n-1}^{n}f(x)dx=F(n)-F(n-1)$

$=\dfrac{-1}{\ln2}\left[e^{-n\ln2}-e^{-(n-1)\ln2}\right]$

$=\dfrac{-1}{\ln2}e^{-n\ln2}\left(1-e^{\ln2}\right)$

$=\dfrac{1}{\ln2}e^{n\ln(\frac12)}$; $\begin{cases}u_0=\frac{1}{\ln2}\\ q=\frac12\end{cases}$

$=\dfrac{1}{\ln2}\cdot\left(\dfrac12\right)^n=\dfrac{1}{2^n\ln2}$

السنة الدراسية: 2017 / 2018 | تصحيح اختبار الفصل III في مادة الرياضيات - م2 - | الشعبة: 3 ع ت

لدينا: $\lim_{n} u_n = \lim_{n} \frac{+1}{2^n \ln 2} = 0$

اذن (u_n) م. متقاربة نحو 0.

ب- حساب المجموع S_n:

$S_n = \frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\dots+\frac{1}{u_n}$

$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{u_n} = \sum_{i=0}^{n}(\ln 2 \cdot 2^n)$

$=\ln 2\,\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$

$S_n = \ln 2(2^{n+1}-1)$

4- اثبات أن (v_n) م. حسابية:

$v_n = \ln u_n = \ln\left(\frac{1}{\ln 2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$= -\ln(\ln 2) - n\ln 2$

(v_n) متتالية حسابية أساسها $(-\ln 2)$ وحدها الأول: $-\ln(\ln 2)$

التمرين الرابع

I- $g(x) = x(1+\ln x)^2 - 8$

$D_g =]e^{-1};+\infty[$

أ- دراسة اتجاه التغير

$g'(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{2}{x}(1+\ln x)\cdot x$

$=(1+\ln x)(1+\ln x+2)$

$g'(x) = (1+\ln x)(3+\ln x)$.

$g'(x)=0$ معناه: $\ln x = -1$ أو $\ln x = -3$

ومنه $x = e^{-1}$ أو $x = e^{-3}$

x	e^{-1}	α	$+\infty$
$g'(x)$	0	+	
$g(x)$	-8 ↗	0 ↗	$+\infty$

ب- اثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]e^{-1};+\infty[$.

بما أن g دالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]e^{-1};+\infty[$ و $g(e^{-1}) = -8$; $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]e^{-1};+\infty[$

جـ- استنتاج اشارة $g(x)$:

x	e^{-1}		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II- $f(x) = 4\left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)+x$

$D_f =]e^{-1};+\infty[$.

1- أ- حساب $\lim_{x\to e^{-1}} f(x)$:

$\lim_{x\to e^{-1}} f(x) = \lim_{x\to e^{-1}} 4\left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)+x = +\infty$ ($1+\ln x \to 0^+$)

التفسير البياني: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = e^{-1}$.

1- ب- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)+x=+\infty$

$f(x)-x+4 = \frac{4-4\ln x+4+4\ln x}{1+\ln x}$

$=\frac{8}{1+\ln x}$.

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{1+\ln x}=0$ فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x-4$ بجوار $+\infty$.

جـ- وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ندرس اشارة الفرق $1+\ln x$

من أجل $x>e^{-1}$ لدينا: $1+\ln x>0$ (تماما)

اذن (C_f) يقع فوق (Δ).

2- أ- اثبات صحة المشتقة:

$f'(x) = 4\,\frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x}(1-\ln x)}{(1+\ln x)^2}+1$

السنة الدراسية: 2017 / 2018 | تصحيح اختبار الفصل III في مادة الرياضيات - م2 - | الشعبة: 3 ع ت

$f'(x) = \frac{-\frac{4}{x}(1+\ln x+1-\ln x)+1+\ln^2 x+2\ln x}{(1+\ln x)^2}$

$= \frac{-\frac{8}{x} + (1+\ln x)^2}{(1+\ln x)^2}$

$= \frac{x(1+\ln x)^2-8}{x(1+\ln x)^2}$

$= \frac{g(x)}{x(1+\ln x)^2}$

ب- استنتاج $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$:

$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha(1+\ln\alpha)^2}=0$

اذن (C_f) يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=f(\alpha)$ عند α.

جـ- جدول تغيرات الدالة f:

اشارة المشتقة من اشارة $g(x)$.

x	e^{-1}		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

د- اثبات علاقة $f(\alpha)$ ثم حصرها

لدينا: $f(\alpha) = 4\,\frac{1-\ln\alpha}{1+\ln\alpha}+\alpha$ ...(1)

لدينا: $g(\alpha) = \alpha(1+\ln\alpha)^2-8$

من $g(\alpha)=0$ نجد $(1+\ln\alpha)^2 = \frac{8}{\alpha}$

ولدينا: $f(\alpha) = 4\,\frac{1-\ln\alpha}{1+\ln\alpha}+\alpha$

$=4\,\frac{(1-\ln^2\alpha)}{(1+\ln\alpha)^2}+\alpha$.

بالتعويض نجد: $= 4\,\frac{1-\ln^2\alpha}{8/\alpha}+\alpha$

$=\frac{\alpha}{2}(1-\ln^2\alpha)+\alpha$.

$=\frac{\alpha}{2}(1-\ln^2\alpha+2)$.

$f(\alpha) = \frac{\alpha}{2}(3-\ln^2\alpha)$

الحصر:

$2{,}33 < \alpha < 2{,}35$

$1{,}165 < \frac{\alpha}{2} < 0{,}175$ ...(1)

$-0{,}731 < -\ln^2\alpha < -0{,}716$

$2{,}269 < 3-\ln^2\alpha < 2{,}284$ ...(2)

$2{,}661 < \frac{\alpha}{2}(3-\ln^2\alpha) < 2{,}6666$ (2)×(1)

3- معادلة المماس (T) عند "1":

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$f(1) = 1$

$f'(1) = \frac{-7}{1} = -7$.

$(T): y = -7x+7-1$

$y = -7x+6$

4- التمثيل البياني.

5- المناقشة البيانية:

لدينا: $f(x) = 2m - \frac{m^2}{f(x)}$.

نحن $f(x)\neq 0$ اذن:

$f^2(x) - 2m f(x) + m^2 = 0$.

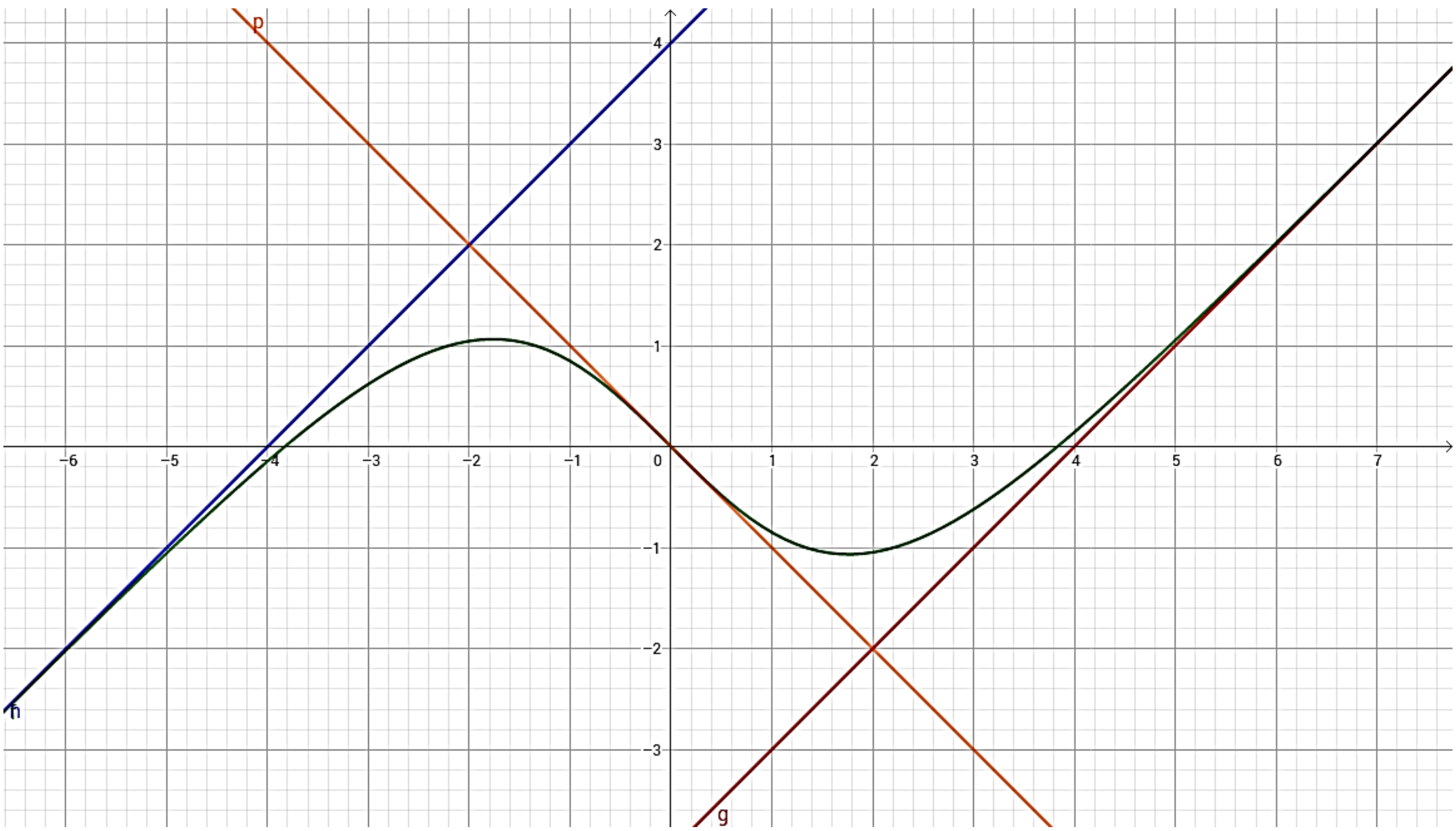
تكافئ $(f(x)-m)^2=0$.

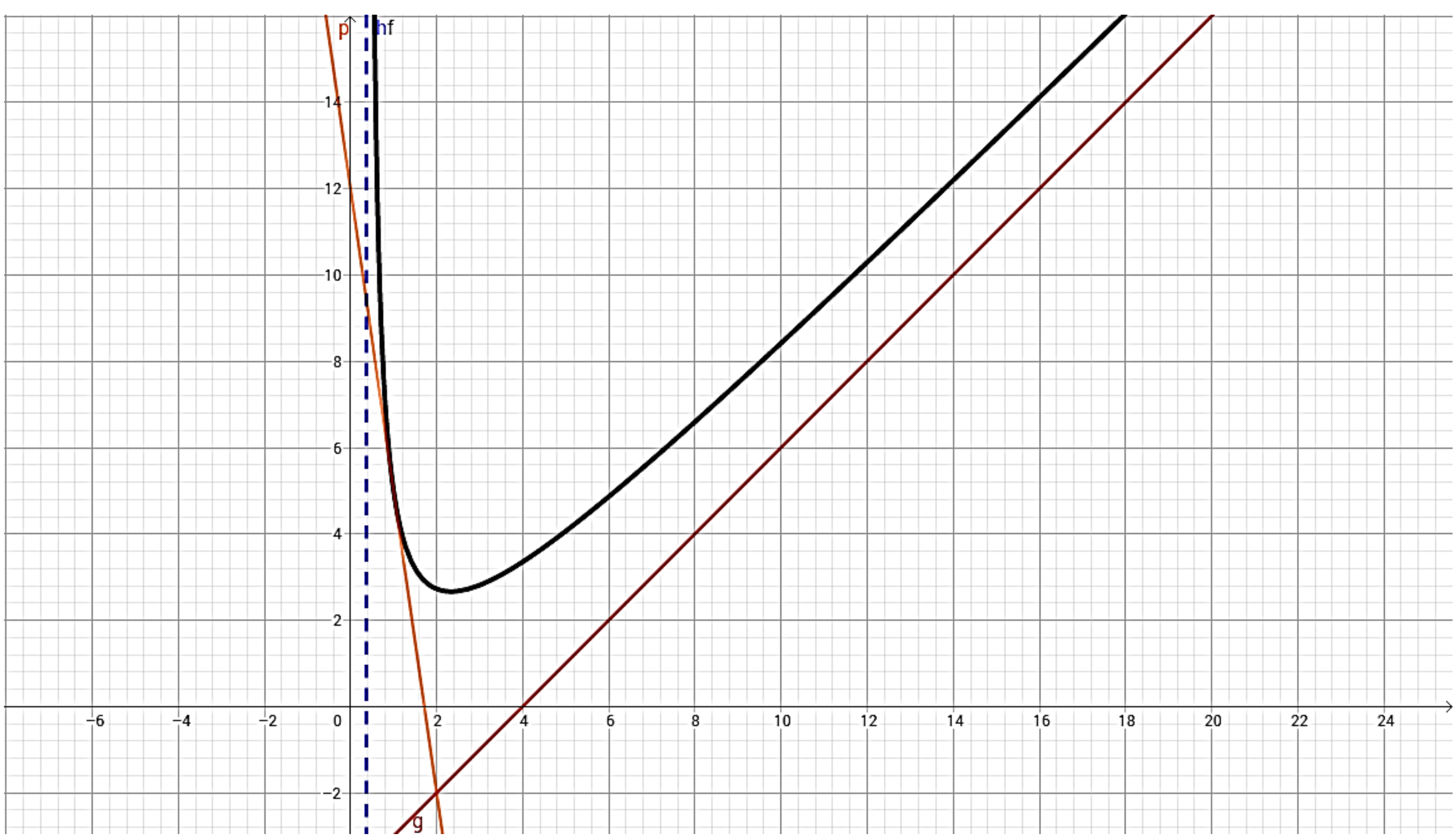
اذن $f(x)=m$.

$m < f(\alpha)$: المعادلة لا تقبل حلول.

$m = f(\alpha)$: // تقبل حلا مضاعفا.

$m > f(\alpha)$: // حلين متمايزين.


p
h
g


p
h
f
g